~ CURS 10 ~

II.4. Legile teoriei macroscopice

1. Legea fluxului electric

A. Forma generală integrală

Enunţ: Fluxul electric prin orice suprafaţă închisă (Σ) este egal cu sarcina electrică totală conţinută în domeniul $\left(V_\Sigma\right)$delimitat de această suprafaţă.

$$\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma} \quad (2.20)$$

sau, presupunând sarcina repartizată numai pe volum:

$$\oint\!\!\!\oint_\Sigma \overline{\mathbf{D}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \cdot dA = \iiint_{(D_\Sigma)} \rho_V dV \quad (2.21)$$

Liniile de câmp electric sunt linii deschise care pleacă de la corpurile încărcate cu sarcini pozitive şi ajung pe corpurile încărcate cu sarcini negative.

B. Forme locale

Pentru domeniile de variaţie continuă a mărimilor, aplicându-i membrului stâng al formei integrale teorema G-O se obţine forma:

$$div\,\overline{\mathbf{D}} = \rho_V \quad (2.22)$$

La suprafaţa de discontinuitate (între două medii cu proprietăţi electrice diferite) încărcată cu densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice se obţine forma:

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad (2.23)$$

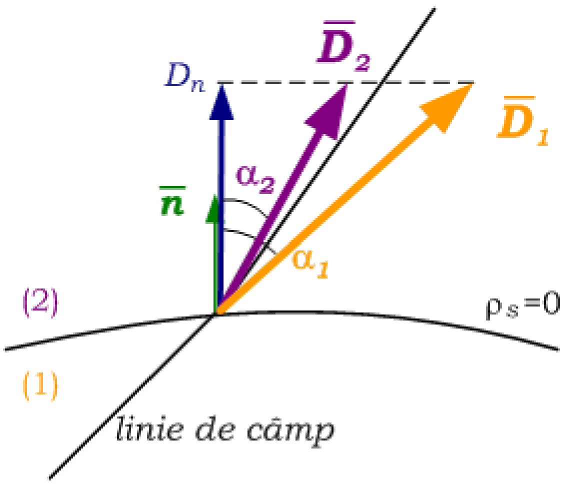

Fig. 2.6. Conservarea componentei normale a inducţiei electrice

Dacă suprafaţa nu este încărcată cu sarcină, se obţine relaţia de conservare a componentei normale a inducţiei electrice:

$$D_{2n} = D_{1n} \quad (2.24)$$

2. Legea polarizaţiei temporare. Legea legăturii în câmp electric ($\overline{\mathbf{D}}$, $\overline{\mathbf{E}}$, $\overline{\mathbf{P}}$)

A. Enunţ: Dependenţa componentei temporare a polarizaţiei de intensitatea câmpului electric inductor este exprimată de *legea polarizaţiei temporare*.

$$\overline{\mathbf{P}t} = f(\overline{\mathbf{E}}) \tag{2.25}$$

- pentru o clasă largă de materiale, în regimuri staţionare sau nu prea rapid variabile în timp, relaţia este de proporţionalitate:

$$\overline{\mathbf{P}}t = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \overline{\mathbf{E}} \quad \text{- materiale liniare şi izotrope} \tag{2.26}$$

χ_e se numeşte susceptivitatea electrica;

- daca $\chi_e = \chi_e\left(\overline{\mathbf{E}}\right)$ materialele sunt neliniare şi anizotrope.
- daca materialul este anizotrop, dar caracterizat de o reţea cristalină, în general uniformă şi continuă:

$$\overline{\mathbf{P}}t = \varepsilon 0 \overline{\overline{\chi e}} \overline{\mathbf{E}} \tag{2.27}$$

$\overline{\overline{\chi_e}}$ este tensorul susceptivităţii electrice.

B. Enunţ: Indiferent de regimul de desfăşurare a fenomenelor electromagnetice, în orice punct şi în orice moment, între inducţia electrică $\overline{\mathbf{D}}$, intensitatea câmpului electric $\overline{\mathbf{E}}$ şi polarizaţia $\overline{\mathbf{P}}$, există relaţia:

$$\overline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{P}} \tag{2.28}$$

Aceste două legi pot fi folosite împreună, rezultând:

$$\overline{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{P}}_t + \overline{\mathbf{P}}_p = \varepsilon_0 \chi_e \overline{\mathbf{E}} + \varepsilon_0 \overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{P}}_p = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{P}}_p = \varepsilon_0 \varepsilon_r \overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{P}}_p = \varepsilon \overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{P}}_p \tag{2.29}$$

unde $\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$ – permitivitatea relativă a materialului.

Pentru mediile lipsite de o polarizaţie permanentă relaţia devine:

$$\overline{\mathbf{D}} = \varepsilon \overline{\mathbf{E}} \tag{2.30}$$

ceea ce arată că liniile de câmp ale celor două câmpuri de vectori sunt în acest caz coincidente.

3. Legea conservării sarcinii electrice

A. Forma integrală

Enunţ: Intensitatea curentului electric de conducţie ce iese printr-o suprafaţă închisă Σ este egală cu viteza de scădere în timp a sarcinii electrice conţinute în domeniul D delimitat de acea suprafaţă

$$i_\Sigma = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot q_{D_\Sigma} \tag{2.31}$$

sau, în forma dezvoltată, presupunând sarcina electrică repartizată numai în volumul corpurilor:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{n}}_{\Sigma}\mathrm{d}A = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{D\Sigma} \rho_V \mathrm{d}V \tag{2.32}$$

Considerând suprafaţa atașată corpurilor în mişcare şi calculând derivata substanţiala a integralei, aplicând apoi teorema Gauss-Ostrogradsky se obţine forma integrală dezvoltată a legii:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{n}}_{\Sigma}\mathrm{d}A = -\iiint_{V_\Sigma}[\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + div(\bar{v}\rho_S)]\mathrm{d}V = -\iiint_{V_\Sigma}\frac{\partial \rho_V}{\partial t}\mathrm{d}V - \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \bar{\mathbf{v}}\rho_v\bar{\mathbf{n}}_{\Sigma}\mathrm{d}A \tag{2.33}$$

Mişcarea dirijată a sarcinilor electrice „legate” de corpuri (asociate lor), în raport cu o anumită suprafaţă, se numeşte convecţie electrică, iar mărimea:

$i_{cv\Sigma} = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \bar{\mathbf{v}}\rho_V \bar{\mathbf{n}}_{\Sigma}\mathrm{d}A$,se numește intensitatea curentului electric de convecție.

B. Forme locale

Relaţia (2.32) se poate rescrie:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} (\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{v}}\rho_V)\bar{\mathbf{n}}_{\Sigma}\,\mathrm{d}A = -\iiint_{v_\Sigma}\frac{\partial \rho_V}{\partial t}\mathrm{d}V \tag{2.34}$$

Această relaţie arată că sarcina electrică dintr-un domeniu delimitat de Σ scade atât datorită curentului de conducţie cât şi celui de convecţie care părăseşte suprafaţa Σ.

Aplicând teorema Gauss-Ostrogradski se obţine:

$$\frac{\partial \rho_V}{\partial t} = div(\bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{v}}\rho_V) \tag{2.35}$$

care reprezintă forma locală a legii pentru domenii de continuitate şi netezime a proprietăţilor fizice locale.

Utilizând forma integrală a legii, în care sarcina se presupune localizată numai pe suprafeţe de discontinuitate dintre două medii, rezultă:

$$divs\,\bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{n}}_{12}(\bar{\mathbf{J}}_2 - \bar{\mathbf{J}}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \tag{2.36}$$

Se remarcă faptul că dacă suprafaţa de discontinuitate este neîncărcată electric $(\rho_S = 0)$sau sarcina localizată pe ea este invariabilă în timp $(\rho_S = \text{ct.})$, traversarea ei de către liniile de curent se face astfel încât să se conserve componenta normală a densităţii curentului electric de conducţie.

$$\bar{\mathbf{n}}_{12}\cdot(\bar{\mathbf{J}}_2 - \bar{\mathbf{J}}_1) = 0 \Rightarrow J_{2n} - J_{1n} = 0 \Rightarrow J_{1n} = J_{2n} \tag{2.37}$$

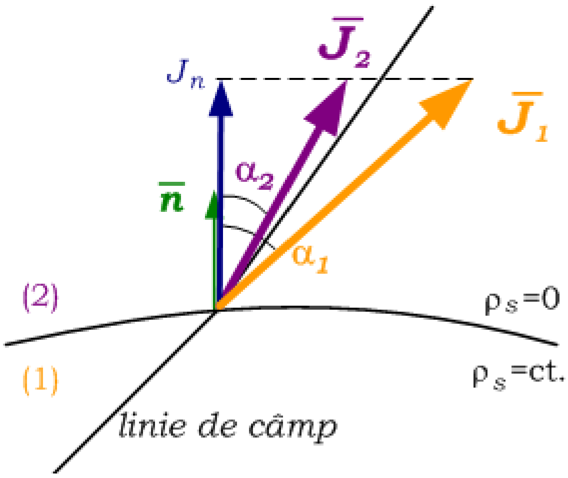

Fig. 2.7. Conservarea componentei normale a densităţii curentului electric

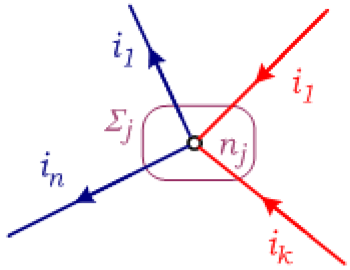

Fig. 2.8. Explicativă pentru teorema I a lui Kirchhoff

Obs: În regim electrocinetic staţionar şi cvasistaţionar, legea conservării sarcinii electrice devine:

$$i_{\Sigma} = \sum_{i_k \in nj} i_k = 0 \tag{2.38}$$

şi reprezintă teorema întâi a lui Kirchhoff, cu enunţul: *suma algebrică a curenţilor din laturile l_k incidente într-un nod n_j al unui circuit electric este nulă.*

4. Legea conducţiei electrice

A. Forma locală

Enunţ: Suma vectorială dintre intensitatea câmpului electric ($\overline{\mathbf{E}}$) şi intensitatea câmpului electric imprimat ($\overline{\mathbf{E}}_i$) din interiorul unui conductor izotrop este proporţională în orice punct cu densitatea curentului de conducţie din acel punct.

$$\overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{E}}_i = \rho \overline{\mathbf{J}} \tag{2.39}$$

unde mărimea ρ este o constantă de material denumită *rezistivitatea electrică*.

Relaţia (2.38) se mai poate scrie şi sub forma:

$$\overline{\mathbf{J}} = \sigma \cdot (\overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{E}}_i) \tag{2.40}$$

unde mărimea $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ se numeşte *conductivitatea electrică*.

B. Forma integrală a legii pentru conductoare filiforme

Integrând forma generală între două puncte *M* şi *N*, de-a lungul unei curbe *C* a unui conductor filiform se obţine:

$$\int_{M(C)}^{N} \overline{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{dl}} + \int_{M(C)}^{N} \overline{\mathbf{E}}_i\overline{\mathbf{dl}} = \int_{M(C)}^{N} \rho \overline{\mathbf{J}}\overline{\mathbf{dl}} \tag{2.41}$$

unde termenii din membrul stâng poartă următoarele denumiri:

$u_b = \int_{M(C)}^{N} \overline{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{dl}}$ - tensiunea electrică la bornele conductorului.

$e_i = \int_{M(C)}^{N} \overline{\mathbf{E}}_i\overline{\mathbf{dl}}$ - tensiunea electromotoare a câmpului electric imprimat.

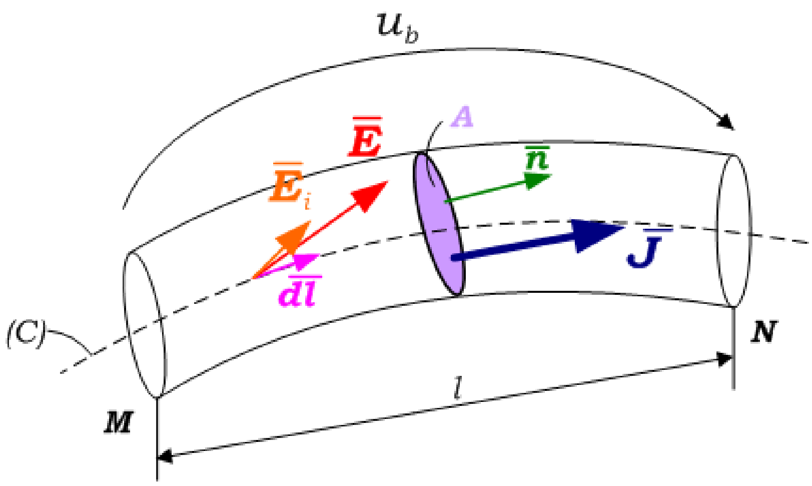

Fig. 2.9. Explicativă pentru forma integrală a legii conducţiei electrice

Dezvoltând succesiv integrala din membrul drept se obţine:

$$\int_{M(C)}^{N} \rho\overline{\mathbf{J}}\overline{\mathbf{dl}} = \int_{M(C)}^{N} \rho\frac{i}{A}dl = i\int_{M(C)}^{N} \rho\frac{dl}{A} \tag{2.42}$$

Pentru un conductor de secţiune constantă, neramificată, mărimea: $R = \int_{(C)} \frac{\rho}{A}dl$ se defineşte ca fiind *rezistenţa electrică* a conductorului.

Pentru un conductor omogen (ρ = ct.) de secţiune constanta: $R = \rho\frac{l}{A}$

Revenind la forma integrală iniţială se obţine:

$$u_b + e_i = R \cdot i \text{ sau } i = G(u_b + e_i) \tag{2.43}$$

unde $G = 1/R$ – conductanţa electrică.

Un conductor având o anumită rezistenţă, dar lipsit de câmp electric imprimat se reprezintă ca în figura *a*), iar dacă el este şi sediul unui câmp electric imprimat, reprezentarea sa conformă unei surse reale de tensiune este cea din figura *b*.

5. Lege transformărilor energetice în procesul de conducţie

A. Forma generală integrală

Enunţ: Densitatea de volum a puterii cedate de câmpul electromagnetic unui conductor în stare electromagnetică este egală cu produsul scalar dintre intensitatea câmpului electric şi densitatea curentului electric de conducţie :

$$p_J = \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{J}} \tag{2.44}$$

Obs: Densitatea de volum a puterii se calculează ca limita raportului dintre puterea ΔP dezvoltată într-un domeniu dat, de volum Δv, și volumul respectiv, atunci când acesta tinde către zero:

$$p = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta v} = \frac{dP}{dv} \tag{2.45}$$

Pentru regimul static ($\overline{\mathbf{J}} = 0$) se observă că în conductoare nu se produc nici un fel de transformări energetice, ceea ce reprezintă una dintre caracteristicile acestui regim.

În forma generală putem înlocui intensitatea câmpului electric, conform legii conducției electrice :

$$\overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{E}}_i = \rho \overline{\mathbf{J}} \Rightarrow \overline{\mathbf{E}} = \rho \overline{\mathbf{J}} - \overline{\mathbf{E}}_i \tag{2.46}$$

rezultând
$$p_J = \rho J^2 - \overline{\mathbf{E}}_i \overline{\mathbf{J}} = p_{ec} - p_g \tag{2.47}$$

unde $p_{ec} = \rho J^2 > 0$, reprezintă densitatea de volum de putere cedată local de câmpul electromagnetic conductoarelor şi transformată în mod ireversibil în căldură (efect electrocaloric, efect Joule-Lenz), iar $p_g = \overline{\mathbf{E}}_i \overline{\mathbf{J}}$, reprezintă densitatea de volum a puterii schimbată de câmpul electromagnetic cu sursele de câmp electric imprimat, ea simbolizează transformările reversibile ale energiei.

B. Forma integrală a legii pentru conductoare filiforme

Integrând expresia finală a legii pe volumul unui conductor filiform şi exprimând elementul de volum sub forma $dv = A\overline{\mathbf{n}}\,\overline{\mathbf{dl}}$, rezultă puterea totală primită de conductor din partea câmpului:

$$P_J = \iiint_{v_\Sigma} p_J\, dv = \iiint_{v_\Sigma} \left(\overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{J}}\right)\left(A\,\overline{\mathbf{n}}\,\overline{\mathbf{dl}}\right) = \iiint_{v_\Sigma} \left(\overline{\mathbf{E}}\overline{\mathbf{dl}}\right)\left(\overline{\mathbf{J}}\,\overline{\mathbf{n}}\,A\right) = u_\tau \cdot i \tag{2.48}$$

Folosind forma integrală a legii conducției electrice ($e_i + u_\tau = Ri \Rightarrow u_\tau = Ri - e_i$), obținem:

$$P_J = Ri^2 - ie_i = P_{ec} - P_g \tag{2.49}$$

unde $P_{ec} = Ri^2 > 0$, reprezintă puterea totală transmisă de câmpul electromagnetic conductorului şi transformată ireversibil în căldură, iar $P_g = e_i \cdot i$, reprezintă puterea schimbată prin transformări energetice reversibile de câmpul electromagnetic cu sursele de câmp imprimat.